Recensione

G. Lolli, *Numeri. La creazione continua della matematica*

Bollati Boringhieri 2015

Gianluca Longa

La mattina del 16 ottobre 1843 il giovane matematico William R. Hamilton (1805-1865), recandosi alla riunione della *Royal Academy* di Dublino in compagnia della moglie, *Lady* Hamilton, ebbe un'ispirazione improvvisa. Come avrà modo di scrivere qualche anno dopo in una splendida lettera al figlio Archibald, lungo il tragitto che costeggiava il *Royal Canal*, all'altezza del ponte di *Brougham* (*Broom Bridge*) «an electric circuit seemed to close; and a spark flashed forth, the herald (as I foresaw, immediately) of many long years to come of definitely directed thought and work, by myself if spared, and at all events on the part of others, if I should even be allowed to live long enough distinctly to communicate the discovery». Questa illuminazione, tanto improvvisa quanto inaspettata, gli consentì di risolvere il problema di generalizzare ed estendere a più dimensioni i numeri complessi, tramite l'introduzione dei cosiddetti quaternioni. Ricordiamo che, in algebra, un quaternione è definibile come un elemento Q della forma $a + ib + jc + kd$, dove le lettere a, b, c, e d denotano numeri reali mentre i, j e k rappresentano tre unità immaginarie. Tenendo conto che ogni unità immaginaria ha quadrato pari a -1 (vale a dire $i^2 = j^2 = k^2 = -1$) e che i prodotti di unità immaginarie diverse seguono le regole (I) $ij = k$, (II) $jk = i$, (III) $ki = j$, l'insieme H dei quaternioni rappresenta un corpo non commutativo che estende il corpo C dei numeri complessi. L'intuizione di Hamilton permise dunque di andare oltre i sistemi numerici classici e di approdare ad un dominio di oggetti matematici precedentemente mai studiati.

Dal punto di vista della pratica matematica ha scarsa importanza riuscire a comprendere se Hamilton abbia scoperto i quaternioni o li abbia inventati: ciò che interessa è che, mediante la loro introduzione, si può risolvere un problema matematico importante e ampliare in tal modo la conoscenza scientifica, abbracciando nuovi ambiti non studiati in epoche precedenti. Filosoficamente, invece, la questione è tutt'altro che marginale: sussiste una differenza importante tra lo scoprire (disvelare, divinare) qualcosa di già esistente e ideare degli oggetti che non hanno nessuna consistenza ontologica. Questa alternativa si presenta anche nel dibattito contemporaneo in filosofia della matematica: se possiamo, da un lato, isolare posizioni che sostengono l'esistenza indipendente degli enti matematici (le cosiddette tesi platoniste), d'altro canto, soprattutto in connessione alla diffusione di una filosofia della matematica di impronta anti-fondazionalista, negli ultimi decenni sempre più studiosi sostengono la natura storica e culturale delle entità numeriche. Tra essi si colloca Gabriele Lolli, a lungo docente di Logica Matematica presso l'Università di Torino e ora ordinario di Filosofia della Matematica presso la Scuola Normale Superiore di Pisa. Con il suo ultimo saggio *Numeri. La creazione continua della matematica* egli intende mostrare come «i numeri, intesi come complesso di conoscenze e tecniche di formulazione e soluzione di problemi» (p. 16), lungi dall'essere qualcosa di ontologicamente solido, sono in realtà «soggetti a casualità storiche e sociali [...], prodotti dell'inventiva umana che ha iniziato da subito, prima ancora forse della scrittura, a introdurre segni per indicare conteggi e misure» (*Ibid.*). Contro ogni forma di platonismo e realismo, Lolli sostiene che i numeri sono essenzialmente parole e la loro evoluzione segue lo sviluppo del pensiero umano.

Inizialmente, e per lungo tempo, «si contavano e misuravano cose di utilità pratica, giorni, greggi, lunghezze» (p. 17) incidendo segni su oggetti materiali reperibili nel mondo circostante, come mostrano alcune evidenze archeologiche risalenti al paleolitico superiore[16]. Ma «i supporti materiali non sono portatili, solo le dita lo sono, e le parole» (p. 18). Forse per questo motivo, i segni vennero progressivamente sostituiti da parole che si separarono, lentamente e faticosamente, dalle cose numerate. Le parole numeriche entravano così nel linguaggio umano, prima come aggettivi ('sette mele', 'sette giorni'), poi come nomi ('cinque più due fa sette'), fino a formare «un linguaggio simbolico separato, completo di verbi, aggettivi [...], pronomi, connettivi» (p. 19). In epoca recentissima, infine, questo 'linguaggio' si è andato ampliando vertiginosamente grazie alla creazione dei nuovi sistemi numerici. L'esito di questo sviluppo storico è, a giudizio di Lolli, la formazione di una fittissima rete di conoscenze integrate e intrecciate in continuo divenire in cui i numeri perdono il loro ruolo predominante e sembrano passare in secondo piano rispetto all'emergere della nozione di struttura, «un evento epocale nella storia del pensiero» (p. 22).

Al fine di confermare queste tesi, nei capitoli centrali del saggio (capp. 2 e 3), Lolli esamina storicamente i sistemi numerici classici, dai naturali ai complessi, «con il racconto di qualche episodio significativo, non aneddotico, relativo alla loro invenzione e alla loro spesso faticosa accettazione» (p. 22). Prendiamo come esempio l'analisi che l'autore propone dei numeri negativi (pp. 45-53): già noti a Diofanto, che nella sua *Arithmetica* «[...] lavorava con i numeri negativi, senza chiamarli tali [...]» (p. 45) e diversamente interpretati dal pensiero indiano, arabo e cinese, in Europa i numeri negativi fecero la loro comparsa durante il Rinascimento, e vennero accolti con grande diffidenza:

[16] Lolli afferma che «il repertorio più antico, l'osso di Ishango, risale a circa il 35.000 a.C.» (p. 16). Si tratta probabilmente di una svista: L'osso di Ishango (*Ishango Bone*) è databile attorno al 20.000-18.000 a.C. L'autore forse intendeva riferirsi al cosiddetto osso di Lebombo (*Lebombo Bone*, 35.000 a.C.).

Michael Stifel li considerava assurdi, Girolamo Cardano «considerava le soluzioni negative di un'equazione impossibili, meri simboli» (p. 49), mentre Descartes poneva riserve sul loro uso. La situazione cambiò molto lentamente: ancora nel XVIII secolo D'Alembert «riteneva che se un problema ha una soluzione negativa significa che qualche ipotesi è sbagliata» (p. 51). Solo con Euler (e poi con Gauss) i numeri negativi entrarono a far parte a pieno diritto nel dominio della conoscenza matematica.

Dalla travagliata storia di questi numeri (ma lo stesso tipo di disamina potrebbe essere delineata per altre nozioni matematiche) possiamo inferire come la matematica non proceda secondo un percorso che prevede tappe di progressivo sviluppo, ma alterne vicende di «sorpresa, incredulità, rifiuto, ripresa, trionfo» (p. 19) in cui le entità numeriche, lungi dall'essere qualcosa «ontologicamente solido» (p. 16), mostrano una natura storico-culturale. Anche passando dai sistemi numerici classici ai 'nuovi' numeri (cap. 4, «La foresta dei numeri»), ovvero ai numeri entrati a far parte del dominio della conoscenza matematica solo in epoca contemporanea, la situazione non cambia: i numeri rappresentano prodotti culturali e come tali vanno studiati.

Nel quinto capitolo («Dai numeri alle strutture», pp. 90-124) Lolli propone un passo ulteriore, consistente nel cercare «mettere un ordine parziale nella selva dei numeri». Due sono i tentativi analizzati: il metodo genetico e il metodo assiomatico. Il primo «consiste nel costruire una successione di estensioni che parte dai numeri naturali, supposti come dati, e sale agli interi, ai razionali, ai reali e ai complessi» (p. 90). In tal modo si cerca «di dare una razionalità alle progressive estensioni del concetto di numero» (*Ibid.*). Da tale sistematizzazione restano fuori però numerosi sistemi numerici; essi trovano un'integrazione solo con il metodo assiomatico, che consente uno studio strutturale dei sistemi numerici: «La struttura di un sistema numerico [...] intuitivamente è un aspetto qualitativo che, se esplicitato, evoca il complesso delle relazioni intercorrenti tra gli elementi del sistema e delle operazioni che si possono eseguire su di essi e delle proprietà di tali operazioni [...]» (p. 106). L'emergere di questa nozione permette di comprendere come «non siano i numeri i protagonisti, me le operazioni, le funzioni, le relazioni su di essi; come in un film, i numeri sono comparse, solo qualcuno emerge; altrimenti è la trama che importa» (p. 22).

Il saggio si conclude con un'appendice 'surreale' (pp. 124-129) in cui l'autore tratteggia il percorso storico di formazione dei numeri surreali evidenziandone al contempo la specificità: essi «sono il risultato di un metodo di generazione uniforme di tutti i numeri noti, in un'unica famiglia *No* che comprende interi, razionali, reali, infinitesimi e infiniti, ordinali e cardinali infiniti» (p. 124). Lungi dall'essere terminata, dunque, «la creazione dei numeri continua» (p. 129).

Nel complesso il saggio di Lolli ha il merito di presentare una panoramica introduttiva ai sistemi numerici e di delineare alcune importanti tesi relativamente alla loro natura. Seppur con qualche imprecisione, Lolli riesce nel difficile compito di presentare, anche al lettore non specialista, non solo i sistemi numerici classici, ma anche i tumultuosi sviluppi della matematica contemporanea. Con linguaggio semplice e diretto, l'utilizzo di esemplificazioni intuitive e il costante riferimento alle vicende storiche in cui le nozioni numeriche si sono sviluppate, Lolli 'immerge' i numeri nell'impresa conoscitiva umana, superando così la tradizionale separazione tra storia della matematica e matematica 'pura'.